63. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2021/2022
Kategória F
Riešenie úloh domáceho kola

1) Cyklistické preteky

Riešenie

a) Od okamihu, keď pretekár na čele prvého pelotónu sa znova ocitne na čele prvého pelotónu (úplne sa vystriedali) uplynie $T_1 = 3t_1 = 30$ s. Za tento čas tento pretekár prejde vzdialenosť

$$s_1 = v_1 T_1 - 3d = 411 \text{ m},$$

a jeho priemerná rýchlosť (ako aj priemerná rýchlosť prvého pelotónu)

$$v_{\mathrm{p1}} = \frac{s_1}{T_1} = v_1 - \frac{3d}{T_1} = v_1 - \frac{d}{t_1} = 13{,}7 \text{ m/s} = 49{,}32 \text{ km/h}. \qquad 4\text{b}$$

Iný postup:
Za čas t_1 prejdú pretekári vzdialenosť $x_1 = v_1\, t_1$. Čelo pelotónu sa ale presunie na druhého pretekára, tzn. čelo pelotónu sa posunie za čas t_1 o vzdialenosť $x_1' = v_1\, t_1 - d$. Čelo pelotónu sa tak posúva rýchlosťou $v_{\mathrm{p1}} = x_1' / t_1 = v_1 - d / t_1 \approx 13{,}7$ m/s = 49,32 km/h.

b) Druhý pelotón musí prejsť vzdialenosť $s - s_1 + D = 21$ km za rovnaký čas, ako prvý pelotón vzdialenosť $s - s_1 = 19{,}5$ km, teda za čas

$$t_{\mathrm{D}} = \frac{s - s_1}{v_{\mathrm{p1}}} = 1423{,}4 \text{ s}$$

a ich priemerná rýchlosť musí byť

$$v_{\mathrm{p2}} = \frac{s - s_1 + D}{t_{\mathrm{D}}} = \frac{s - s_1 + D}{s - s_1} v_{\mathrm{p1}} = 14{,}75 \text{ m/s} = 53{,}11 \text{ km/h}. \qquad 3\text{b}$$

c) Porovnaním rýchlosti čelného pretekára a priemernej rýchlosti pelotónu dostaneme za čas striedania odstup medzi cyklistami v pelotóne, teda

$$(v_2 - v_{\mathrm{p2}})t_2 = d \text{ a po dosadení } \left(15{,}50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 14{,}75\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) t_2 = 3{,}0 \text{ m},$$

odkiaľ

$$t_2 = \frac{d}{v_2 - v_{\mathrm{p2}}} = 4{,}0 \text{ s}. \qquad 3\text{b}$$

2) Mlieko a smotana

Riešenie

a) Tlak je na dne všetkých troch nádob (obr. F–2 (a), (b), (c)) rovnaký. Mlieko je na začiatku homogénna kvapalina, vo všetkých nádobách tá istá, výška stĺpca mlieka je vo všetkých troch prípadoch rovnaká, aj gravitačné zrýchlenie je rovnaké, aj tlak vzduchu nad voľnou hladinou mlieka je rovnaká, preto tlak na dne nádob musí byť rovnaký vo všetkých troch prípadoch.

1b

b) Keď sa smotana od mlieka oddelí, objem kvapaliny sa nezmení a nezmení sa ani celková hmotnosť mlieka. Označme objem V_{s} smotany, ktorá sa oddelí od mlieka. Hmotnosť mlieka sa nezmenila, preto musí platiť.

$$V\rho_{\mathrm{m}} = V_{\mathrm{s}}\rho_{\mathrm{s}} + (V - V_{\mathrm{s}})\rho_{m0},$$

Pre objem smotany dostaneme rovnicu

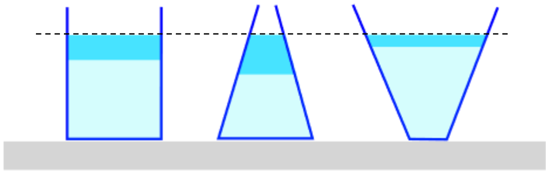
$V(\rho_{m0} - \rho_m) = V_s(\rho_{m0} - \rho_s)$, teda $(2000\ \mathrm{cm}^3)(0{,}002\ \mathrm{g/cm}^3) = V_s(0{,}030\ \mathrm{g/cm}^3)$

Pre objem smotany dostaneme $V_s \approx 133$ ml

Nádoba má rovné steny, preto $\frac{d}{h} = \frac{V_s}{V} = \frac{\rho_{m0} - \rho_m}{\rho_{m0} - \rho_s}$, a odtiaľ

$d = h\frac{\rho_{m0} - \rho_m}{\rho_{m0} - \rho_s} \approx 1{,}3$ cm. 4b

c) Obrázok: Správne načrtnutie hrúbky vrstvy smotany v oboch nádobách so šikmými stenami 1b



Obr. RF–1

Do každej nádoby sa nalialo rovnaké mlieko. Určitý podiel objemu (aj hmotnosti) mlieka je smotana. V nádobe, ktorá má zvislé steny (A), predstavuje rovnaký objemový podiel tenšiu vrstvu, než v nádobe, ktorá sa smerom hore zužuje (B), ale hrubšiu vrstvu, než v nádobe, ktorá sa smerom hore rozširuje (C). 1b

d) Teraz už nemáme jednu homogénnu kvapalinu, ale dve (homogénne) kvapaliny. Smotana má menšiu hustotu, než zvyšok mlieka, ktorá zostala po oddelení sa smotany. 1b

Tlak na dne každej nádoby je rovný súčtu tlakov, ktorý pochádza od tlaku smotany a tlaku ktorý pochádza od zvyšku mlieka (bez smotany). Súčet výšky stĺpcov je vo všetkých nádobách rovnaký, ale výška stĺpca mlieka bez smotany (kvapalina s väčšou hustotou) je najmenšia v nádobe (B) a najväčšia v nádobe (C). 1b

Preto je tlak na dne nádoby (B) najmenší a v nádobe (C) je najväčší. 1b

3) Schéma zapojenia

Riešenie

a) A – zdroj elektrického napätia, napr. napätie UB,C – spínače, napr. zapnutý stav, vypnutý stav D – žiarovka, napr. odpor, či výkon pri štandardnom napájacom napätí.

Za správne pomenovanie 0,5b, za jednu charakteristiku 0,5b (maximálne 0,5b), pričom spínače sa počítajú len raz. Celkom maximálne 3b

b) Schéma ukazuje žiarovku zapojenú do obvodu so zdrojom napätia, ale na obrázku je obvod prerušený a žiarovka nesvieti 1b

Zmenou stavu spínača B alebo C sa obvod uzavrie, a žiarovka sa rozsvieti. 2b

Pri ďalšej zmene stavu ktoréhokoľvek spínača B, či C sa obvod znova preruší, a žiarovka, ktorá predtým svietila, teraz zhasne 2b

c) Takýmto zapojením môžeme vyriešiť zapínanie a vypínanie osvetlenia vo veľkej miestnosti, kde vypínače môžu byť od seba veľmi vzdialené. Napríklad na jednom a druhom konci dlhej chodby alebo na hornom konci a dolnom konci schodišťa. 2 b

4) Kalenie ocele

Riešenie

a) Označme hmotnosť uhlíka v oceli m_C.

$\frac{m_\mathrm{C}}{m} = \frac{1}{2} \times 0{,}0214$, teda $m_\mathrm{C} = \frac{1}{2} \times 0{,}0214 \times 1{,}50\ \mathrm{kg} \approx 16\ \mathrm{g}$. 2b

b) Hmotnosť oleja v kúpeli $m_\mathrm{o} = \rho_\mathrm{o} V_\mathrm{o} = 6{,}92\ \mathrm{kg}$.

Meč oleju odovzdá teplo

$Q_\mathrm{m} = m c_\mathrm{m}(t_\mathrm{m} - t_1)$,

kde t_1 je výsledná teplota, na ktorej sa ustáli teplota meče aj olejového kúpeľa. Olej prevezme rovnaké množstvo tepla

$Q_\mathrm{o} = m_\mathrm{o} c_\mathrm{o}(t_1 - t_0)$.

Kalorimetrickú rovnicu $Q_\mathrm{m} = Q_0$ upravíme na tvar

$(m c_\mathrm{m} + m_\mathrm{o} c_\mathrm{o}) t_1 = (m c_\mathrm{m} t_\mathrm{m} + m_\mathrm{o} c_\mathrm{o} t_0)$,

odkiaľ

$t_1 = \frac{m c_\mathrm{m} t_\mathrm{m} + m_\mathrm{o} c_\mathrm{o} t_0}{(m c_\mathrm{m} + m_\mathrm{o} c_\mathrm{o})} \approx 56{,}2\ \mathrm{°C}$. 4b

c) Hmotnosť vody v kúpeli $m_\mathrm{v} = \rho_\mathrm{v} V_\mathrm{v} = 10{,}0\ \mathrm{kg}$. Zopakujeme výpočet časti b) pre vodu a dostaneme, výslednú teplotu t_2 pre prípad, keby sa použil vodný kúpeľ

$t_2 = \frac{m c_\mathrm{m} t_\mathrm{m} + m_\mathrm{v} c_\mathrm{v} t_0}{(m c_\mathrm{m} + m_\mathrm{v} c_\mathrm{v})} \approx 30{,}4\ \mathrm{°C}$.

V prípade olejového kúpeľa bolo

$Q_\mathrm{mo} = m c_\mathrm{m}(t_\mathrm{m} - t_1) \approx 4{,}19\ \mathrm{kJ}$,

v prípade vodného kúpeľa by odovzdala vode teplo

$Q_\mathrm{mv} = m c_\mathrm{m}(t_\mathrm{m} - t_2) \approx 4{,}37\ \mathrm{kJ}$ 3b

Vode by teda odovzdal

$p = \frac{Q_\mathrm{v}}{Q_o} \approx 1{,}043$ – násobok tepla, teda o 4,3 % viac. 1b

5) Čaj, lyžička, voda

Riešenie:

a) Začiatočná teplota lyžičky bola t_1. Po ponorení do pohára so studenou vodou s teplotou t_2 odovzdá lyžička teplo

$Q_\mathrm{L} = m_\mathrm{L} c_\mathrm{L}(t_1 - t_\mathrm{v1})$,

kde t_v1 je výsledná teplota lyžičky v studenej vode. Uvedené množstvo tepla zohreje studenú vodu na teplotu t_v1, preto platí

$m_\mathrm{L} c_\mathrm{L}(t_1 - t_\mathrm{v1}) = \rho V_2 c(t_\mathrm{v1} - t_2)$,

odkiaľ

$t_\mathrm{v1} = \frac{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L} t_1 + \rho V_2 c t_2}{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L} + \rho V_2 c} \approx 10{,}70\ \mathrm{°C}$

a

$Q_\mathrm{L} = \frac{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L}\, \rho V_2 c}{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L} + \rho V_2 c}(t_1 - t_2) \approx 1{,}468\ \mathrm{kJ}$. 3b

b) Po spätnom ponorení lyžičky do čaju dôjde znova k výmene tepla a pre výslednú teplotu čaju t_c2 bude platiť

$t_\mathrm{c2} = \frac{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L} t_\mathrm{v1} + \rho V_1 c t_1}{m_\mathrm{L} c_\mathrm{L} + \rho V_1 c} \approx 78{,}3\ \mathrm{°C}$.

Teplota čaju sa zmení o $\Delta t_1 = -1{,}7$ °C. 2b

c) Týmto postupom môže čaj chladiť, až teplota čaju, studenej vody a lyžičky budú rovnaké, teda na výslednú teplotu t_v, pre ktorú platí (zákon zachovania energie)

$$(m_\mathrm{L}c_\mathrm{L} + \rho V_1 c)(t_1 - t_\mathrm{v}) = \rho V_2 c(t_\mathrm{v} - \mathrm{t}_2),$$

odkiaľ

$$t_\mathrm{v} = \frac{(m_\mathrm{L}c_\mathrm{L} + \rho V_1 c)t_1 + \rho V_2 c t_2}{m_\mathrm{L}c_\mathrm{L} + \rho(V_1 + V_2)c} = 30{,}4\ °\mathrm{C}$$ 3b

d) Peter mohol usúdiť, že výsledný rozdiel teplôt 80 °C – 30,4 °C = 49,6 °C je približne 29–násobkom poklesu 1,7 °C (49,6 / 1,7 ≈ 29).

Ako ukazuje riešenie časti (a), množstvo preneseného tepla závisí od teplotného rozdielu medzi čajom a vodou. Každým prenosom sa však tento rozdiel zmenšuje, a teda nebude každý raz 1,7 °C. Počet prenesení tepla lyžičkou by musel byť veľmi veľký, teoreticky nekonečný. Pravdu teda má Petrova sestra. 2b

Poznámka: Podľa inej úvahy celkové prenesené množstvo tepla do vyrovnania teplôt

$$Q = \frac{(m_\mathrm{L}c_\mathrm{L} + \rho V_1 c)\rho V_2 c}{m_\mathrm{L}c_\mathrm{L} + \rho(V_1 + V_2)c}(t_1 - t_2) = 42{,}57\ \mathrm{kJ} = 29\ Q_\mathrm{L}$$

z čoho podobne mohla vzniknúť Petrova falošná predstava. Opäť platí, že teplo prenesené lyžičkou nie je stále Q_L, ale postupne klesá.

6) Kolesá v rúre

Riešenie

Dotykové body valcov A, C, D sa pohybujú rovnakou obvodovou rýchlosťou, ako je obvodová rýchlosť v_V rúry. Rovnakú obvodovú rýchlosť má i valec B.

a) Povrchy sa neprešmykujú, preto koľko prejde na povrchu rúry veľké koleso, toľko musí prejsť aj malé koleso, teda $N_\mathrm{A} o_\mathrm{A} = N_\mathrm{D} o_\mathrm{D}$, kde N_A a N_D je počet otočení príslušných kolies.

$$N_\mathrm{D} = N_A \frac{o_\mathrm{A}}{o_\mathrm{D}} = 24$$ 2b

b) Kolesá sa neprešmykujú na rúre, a príslušnú rovnicu môžeme napísať aj pre rúru:

$$N_\mathrm{B} o_\mathrm{B} = N_\mathrm{V} o_\mathrm{V}$$

Jedna celá otočka zodpovedá otočeniu o 360°, preto môžeme predchádzajúcu rovnicu písať aj v tvare

$$\varphi_\mathrm{B} o_\mathrm{B} = 360° N_\mathrm{B} o_\mathrm{B} = 360° N_\mathrm{V} o_\mathrm{v} = \varphi_\mathrm{V} o_\mathrm{V}$$

Odtiaľ dostaneme

$$\varphi_\mathrm{B} = \varphi_\mathrm{V} \frac{o_\mathrm{V}}{o_\mathrm{B}} = 30° \frac{98\ \mathrm{cm}}{30\ \mathrm{cm}} = 98°.$$ 3b

c) Predstavme si, že otáča sa rúra okolo nehybného rámu, potom dostaneme o jednu otočku viac pre každé koleso, než keď sa otáča rám v nehybnej rúre, 1 b

teda

$$\varphi_\mathrm{A} = 360° \left(\frac{o_\mathrm{V}}{o_\mathrm{A}} - 1\right) = 228°,\ \varphi_\mathrm{B} = 360° \left(\frac{o_\mathrm{V}}{o_\mathrm{B}} - 1\right) = 816°,$$

$$\varphi_\mathrm{C} = 360° \left(\frac{o_\mathrm{V}}{o_\mathrm{C}} - 1\right) = 1\,992°,\ \varphi_\mathrm{D} = 360° \left(\frac{o_\mathrm{V}}{o_\mathrm{D}} - 1\right) = 3\,168°$$ 2b

Pri numerickej chybe odobrať 1b.

d) Pri rýchlosti 49 cm/min prejde dotykový každého kolesa celý obvod o_V rúry za dobu 2 min. Za tento čas rám vykoná práve jednu otáčku o 360°. Podľa výsledku z predchádzajúcej časti c) sa najväčšie koleso A otočí okolo svojej osi o uhol $\varphi_A = 228°$. To znamená, že za jednu minútu to bude 114° a za jednu sekundu 1,9°.

2b

Poznámka: Povieme, že sa otáča *uhlovou rýchlosťou* $\omega = 114°/\text{min.}$, alebo 1,9°/s.

K bodu c) Ak koleso A prejde po celom obvode rúry o_V, je počet otočení vzhľadom na rúru o_V / o_A. Jednu otočku však urobí i s kolesom rám, takže počet otočení kolesa okolo vlastnej osi je o jednu otočku menší $o_V / o_A - 1$. Ak uvážime, že jedno otočenie predstavuje uhol 360°, je uhol celkového natočenia $\varphi_A = 360° \left(\frac{o_V}{o_A} - 1\right) = 228°$.

Rovnako dostaneme uhol natočenia zvyšných kolies ...

63. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy domáceho kola kategórie F*

Autori návrhov úloh:	Boris Lacsný (1, 3, 4, 5), Aba Teleki (2, 6, 7)
Recenzia:	Ivo Čáp
Preklad textu úloh do maďarského jazyka:	Aba Teleki
Redakcia:	Ivo Čáp
Vydal:	Slovenská komisia fyzikálnej olympiády IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2021